UTN HAEDO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL HAEDO

Nombre y Apellido:..

Correo:...

Curso:2do 7ma

Fecha:22/08/23

1er PARCIAL DE ANÁLISIS II

Ejercicios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Nota
Puntaje	0.5	1	1.5	1	1	1.5	1	1.5	1	

Ejercicio 1) *Determine gráfica y analíticamente el dominio de la siguiente función* $f(x,y) = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{Ln(4x-6-2y)}$

Ejercicio 2) *Sea la función* $z = P(x,y)$ *siendo* $P(x,y)$ *el polinomio de Brook Taylor de primer orden correspondiente al desarrollo de la función* $z = Sin(x+y)$ *en un entorno de* $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *y sea la superficie cónica S dada por la ecuación* $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$. *Probar que la superficie S es ortogonal a* $z = P(x,y)$ *en el punto* $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$. *Justificar el procedimiento utilizado para su desarrollo en cada paso.*

Ejercicio 3) *Dada la siguiente función* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2-y} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Se pide determinar si la función es continua en el origen. Escribe las propiedades que cumple una función diferenciable en un punto y su interpretación geométrica en el caso de una función de dos variables independientes. La función **f(x,y)** *¿es diferenciable en el origen?*

Ejercicio 4) *Hallar* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *y expresar el* dz , *si* $\begin{cases} x - u - Ln(v) = 0 \\ y - v + Ln(u) = 0 \end{cases}$ *define a* $u = u(x,y)$ *y* $v = v(x,y)$ *siendo* $z = 2u + 3v$ *en* $(u_0, v_0) = (1,1)$.

Ejercicios 5) *Dos postes verticales de* **4m y 7 m** *de altura se encuentran a una distancia de* **8 metros** *uno del otro (Ver figura de la derecha). Se desea conectar los extremos superiores con un cable, que además debe tocar el suelo entre ambos postes, como muestra la figura. ¿En qué punto del suelo, se supone horizontal, se debe amarrar el cable para que su longitud sea mínima? (Considera el método de los* **multiplicadores de Lagrange** *formando su función con la que hay que optimizar y su restricción). Explique la condición necesaria para la existencia de extremos y su interpretación geométrica*

.**Ejercicio 6)** *Dada la ecuación* $ue^{ux} - 2x - y = 0$ *que define una función* **u=u(x,y)** *diferenciable en todo punto de su dominio ,calcular la derivada direccional de* **u=u(x,y)** *en el punto* **(x,y)=(1,1)** *y en la dirección hacia el punto* **(x,y)=(4,3)**. *Realiza un gráfico en el plano e indicar las direcciones donde la derivada direccional es nula. Explique la relación entre la derivada direccional con el vector gradiente y su interpretación geométrica.*

Ejercicio 7) *Una curva que responde a una función* $y = f(x)$ *pasa por el origen. Por un punto arbitrario de la curva se trazan paralelas a los ejes de tal manera que forma un rectángulo con ellos. La curva divide al rectángulo en dos regiones A y B tal que una de ellas tiene un área n veces la otra. Hallar la función* $y = f(x)$.

Ejercicio 8) *Determinar los puntos críticos de* $f(x,y)$ *si* $\nabla f(x,y) = (h(x) + 6xy - 2y - 3; 3x^2 - 2x - 1)$ *donde* $h(x)$ *es la solución particular de la siguiente ecuación diferencial* $\frac{h'}{10} + \frac{3}{5x} = -\frac{1}{5x}h$ *que pasa por el punto de coordenadas* $(1;15)$.*Clasifícalos*

Ejercicio 9)*Dada* $f(x,y) = 3y\,h(x)$ *con* $h = h(x)$ *derivable, determina el valor y la dirección de la máxima derivada direccional en* $(1,2)$ *siendo* $h = h(x)$ *la solución de la ecuación diferencial* $x\,h'(x) - (1+3x)h = 0$, *con* $h(1) = e^3$

(resuelto por Sylvina)

AM2 FRH | 1° Parcial | HOJA N° 1/5 | FECHA 22-8-23

1) Determinar gráfica y analíticamente, el dominio de

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{\ln(4x-6-2y)}$$

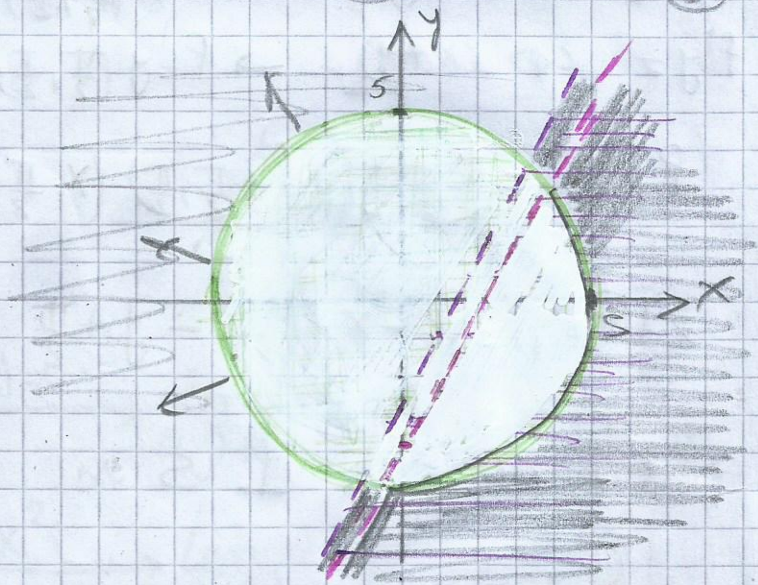
$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underbrace{25 \geq -x^2-y^2}_{①} \cap \underbrace{4x-6-2y > 0}_{②} \cap \underbrace{4x-6-2y \neq 1}_{③}\}$$

① $x^2+y^2 \leq 25$

② $4x-6-2y > 0$

$2x-3-y > 0$

$y < 2x-3$



③ $4x-6-2y \neq 1$

$4x-2y \neq 7$

$4x-7 \neq 2y$

$y \neq -\frac{7}{2} + 2x$

$$\boxed{Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 25 \cap y < 2x-3 \cap y \neq -\frac{7}{2} + 2x\}}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

2) Sea la función $z = P_{(x,y)}$ el polinomio de Brook Taylor de 1° orden correspondiente al desarrollo de la función $z = \text{sen}(x+y)$ en un entorno de $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y sea la sup. cónica S dado por la ec $x^2+y^2-2z^2=0$.

Probar que S es ortogonal a $z = P_{xy}$ en $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$

$$f(x,y) = \text{sen}(x+y) \longrightarrow f\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(\pi) = 0$$

$$f'_x = \cos(x+y) \longrightarrow f'_x\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1$$

$$f'_y = \cos(x+y) \longrightarrow f'_y\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1$$

$$P(x,y) = \underbrace{f\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{f'_x\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right) + \underbrace{f'_y\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}\left(y-\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$z = P(x,y) = -x+\frac{\pi}{2} - y + \frac{\pi}{2} = \boxed{-x-y+\pi = P(x,y)}$$

gráfica de $P_{(x,y)} \perp S$ si $\underbrace{N_{P(x,y)} \cdot N_S}_{\text{los normales son } \perp} = 0$

$$N_{P(x,y)} = (-1,-1,-1)$$

$$N_S = (2x, 2y, -4z) \rightarrow N_{S(1,1,1)} = (2,2,-4)$$

$$(-1,-1,-1)\cdot(2,2,-4) = -2-2+4 = 0 \ ✓$$

$$\boxed{S \text{ es } \perp \text{ a } z = P(x,y) \text{ en } (1,1,1)}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM 2 FRH	1° parcial	HOJA N° 2/5 FECHA 22-8-23

3) Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2+y^2-y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Se pide determinar si la función es continua en el origen

Escribir las prop. que cumpla una función diferenciable en un punto y su interpretación geométrica.

$f(x,y)$ ¿es diferenciable en el origen?

$f(0,0) = 0$

$¿\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2-y} \xrightarrow{\text{por } y=0} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\xrightarrow{y=x^2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{\cancel{x^2}+x^4-\cancel{x^2}} = 1$$

$\neq \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\boxed{f \text{ NO es continua en } (0,0)}$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

4) Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y expresar el dz si $\begin{cases} x - u - \ln(v) = 0 \\ y - v + \ln(u) = 0 \end{cases}$

define a $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ siendo $z = 2u + 3v$ en $(x_0, y_0) = (1,1)$

$\boxed{\text{u y v son dependientes} \quad \text{x e y son ind.}}$

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x - u - \ln(v) \\ G(x,y,u,v) = y - v + \ln(u) \end{cases}$$

$u = 1 \quad v = 1$
$x = 1 \quad y = 1$
$z = f_{(u,v)}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - u'_x - \frac{v'_x}{v} = 0 \longrightarrow u'_x + v'_x = 1 \quad \text{I}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -u'_y - \frac{v'_y}{v} = 0 \longrightarrow u'_y + v'_y = 0 \quad \text{II}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -v'_x + \frac{u'_x}{u} = 0 \longrightarrow u'_x - v'_x = 0 \quad \text{III}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 1 - v'_y + \frac{u'_y}{u} = 0 \longrightarrow u'_y - v'_y = -1 \quad \text{IV}$$

I y III $\begin{cases} u'_x + v'_x = 1 \\ u'_x - v'_x = 0 \end{cases} \longrightarrow u'_x = \frac{1}{2} \qquad v'_x = \frac{1}{2}$

II y IV $\begin{cases} u'_y + v'_y = 0 \\ u'_y - v'_y = -1 \end{cases} \longrightarrow u'_y = -\frac{1}{2} \qquad v'_y = \frac{1}{2}$

$$z = 2u + 3v \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 2 u'_x{}_{(1,1)} + 3 v'_x{}_{(1,1)} =$$
$$= 2\,\frac{1}{2} + 3\,\frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{2} = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)}$$

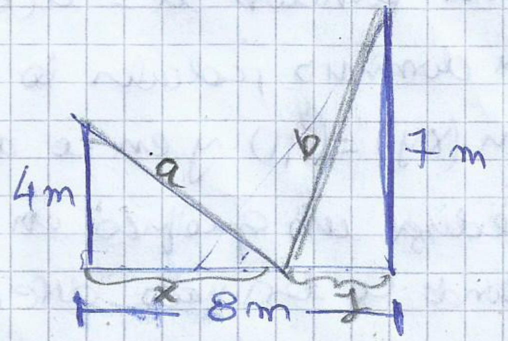
$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 2 u'_y{}_{(1,1)} + 3 v'_y{}_{(1,1)} =$$
$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} = \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM2 FRH	1º parcial	HOJA Nº 3/5
		FECHA 22-8-23

5) Dos postes verticales de 4 m y 7 m de altura se encuentran a una distancia de 8 metros. (ver fig.)
Se desea conectar los extremos superiores con un cable que además debe tocar el suelo entre ambos postes, como muestra la fig.



¿en qué punto del suelo (se supone horizontal) se debe amarrar el cable para que su long. sea mínima?

$$x+y=8 \qquad a^2 = 4^2 m^2 + x^2 \rightarrow a = \sqrt{16m^2+x^2}$$

$$\underbrace{x+y-8=0}_{\text{ecuación}} \qquad b^2 = 7^2 m^2 + y^2 \rightarrow b = \sqrt{49m^2+y^2}$$

longitud de los cables: $a+b \rightarrow \underbrace{\boxed{f(x,y) = \sqrt{16m^2+x^2} + \sqrt{49m^2+y^2}}}_{\text{a optimizar (minimizar)}}$

$$p(x,y,\lambda) = \sqrt{16^2+x^2} + \sqrt{49+y^2} + \lambda(x+y-8)$$

$$\begin{cases} p'x = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{16+x^2}} + \lambda = 0 \\ p'y = \dfrac{2y}{\sqrt{49+y^2}} + \lambda = 0 \\ p'\lambda = x+y-8=0 \rightarrow x = 8-y \end{cases}$$

$$\frac{x}{\sqrt{16+x^2}} = \frac{y}{\sqrt{49+y^2}} \rightarrow \frac{x^2}{16+x^2} = \frac{y^2}{49+y^2}$$

$$\rightarrow \frac{(8-y)^2}{16+(8-y)^2} = \frac{y^2}{49+y^2}$$

$$(64-16y+y^2)(49+y^2) = y^2(16+64-16y+y^2)$$

$$3136+64y^2-784y-\cancel{16y^3}+49y^2+\cancel{y^4} = 80y^2-\cancel{16y^3}+\cancel{y^4}$$

$$33y^2-784y+3136=0 \rightarrow y_1 = 56/3 \;\cancel{>8} \qquad y_2 = 56/11$$

$$x+y=8 \rightarrow x = \frac{32}{11}$$

$$\boxed{x = \frac{32}{11}\,m \qquad y = \frac{56}{11}\,m}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

6) Dada la ecuación $ue^{ux} - 2x - y = 0$ que define una función $u = u(x,y)$ diferenciable en todo punto de su dominio, calcular la derivada direccional de $u = u(x,y)$ en $(x,y) = (0,1)$ y en la dirección hacia el punto $(x,y) = (4,3)$

Redibujar un gráfico en el plano e indicar las direcciones donde la derivada direccional es nula.

Explicar la relación entre la derivada direccional con el vector gradiente y su interpretación geométrica.

$$G(x,y,u) = ue^{ux} - 2x - y \qquad (x,y) = (0,1)$$

$$G(0,1,u) = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\left.\begin{aligned} G'_x &= ue^{ux}u - 2 \rightarrow G'_x(0,1,1) = -1 \\ G'_y &= -1 \longrightarrow G'_y(0,1,1) = -1 \\ G'_u &= e^{ux} + ue^{ux}x \rightarrow G'_u(0,1,1) = 1 \end{aligned}\right\} \quad u'_x = -\frac{-1}{1} \qquad u'_y = \frac{-1}{1}$$

$$\boxed{\nabla u(0,1) = (1,1)}$$

u es diferenciable $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \breve{v}}(0,1) = \nabla u(0,1) \cdot \breve{v} = (1,1) \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) =$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

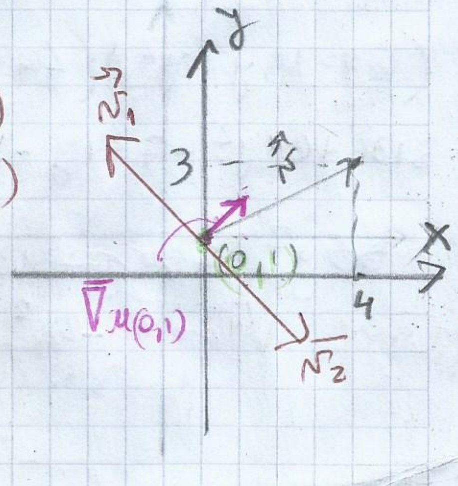
$$\vec{v} = (4,3) - (0,1) = (4,2)$$

$$\breve{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}\right)$$

$$\breve{v} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \breve{v}}(0,1) = \frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \breve{v}} = 0 \begin{cases} \vec{v_1} = (-1,1) \\ \vec{v_2} = (1,-1) \end{cases}$$



(resuelto por Sylvina)

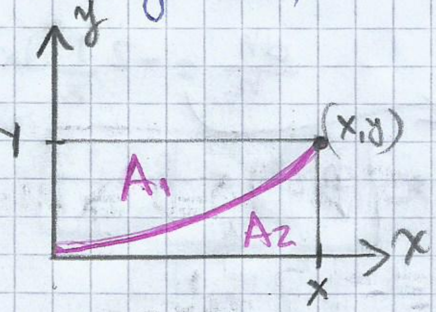
AM2 UTN FRH | 1° parcial | HOJA N° 4/5 FECHA 22-8-23

7) Una curva que responde a una función $y = f(x)$ pasa por el origen.

Por un punto arbitrario de la curva se trazan paralelas a los ejes de tal manera que forme un rectángulo con ellos.

La curva divide al rectángulo en 2 regiones A y B tal que una de ellas tiene un área m veces la otra

Hallar $y = f(x)$



$$A = A_1 + A_2 = x \cdot y$$

$$A_1 = m A_2 \qquad y = f(x)$$

$$\underbrace{A}_{} = A_1 + A_2 = m A_2 + A_2 = (m+1) A_2$$

$$xy = (m+1) \int_0^x \int_0^{f(t)} dy \, dt$$

$$xy = (m+1) \int_0^x f(t) \, dt$$

$x' = 1$

derivo x como variable
" y como función

$$\frac{d}{dx} xy = \frac{d}{dx} (m+1) \int_0^x f(t) \, dt$$

$$y + xy' = (m+1) \, f(x) \; y$$

$$y + xy' = (m+1) y = my + y$$

$$xy' = my + y - y$$

$$xy' = my$$

$$x \frac{dy}{dx} = ny \implies \frac{1}{y} dy = \frac{m}{x} dx$$

$$\ln(y) = m \ln(x) + c =$$

$$= \ln(x^n) + c$$

$$e^{\ln(y)} = e^{\ln(x^n)} \cdot \underbrace{e^c}_{k}$$

$$\boxed{y = k x^n}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

8) Determinar los puntos críticos de $f(x,y)$ si $\nabla f(x,y) = (h(x) + 6xy - 2y - 3 \,;\, 3x^2 - 2x - 1)$ donde $h(x)$ es la sol. part. de $\frac{h'}{10} + \frac{3}{5x} = -\frac{1}{5x} h$ que pase por el punto de coord. $(1,15)$. Clasificarlos

Hallo $h(x)$

$$\frac{h'}{10} + \frac{1}{5x} h = -\frac{3}{5x}$$

SH) $\frac{h'}{10} + \frac{1}{5x} h = 0 \longrightarrow \frac{h'}{10} = -\frac{1}{5x} h \rightarrow \frac{dh}{dx} = -\frac{2}{x} h$

$$\frac{dh}{h} = -2 \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(h) = -2 \ln(x) + c$$

$$\boxed{h(x) = k \cdot \frac{1}{x^2}}$$

SP) $h_p = Ax + c$

$h'_p = A$

$$\frac{A}{10} + \frac{(Ax+c)}{5x} = \frac{-3}{5x}$$

$$\frac{Ax + 2Ax + 2c}{\cancel{10x}} = \frac{-6}{\cancel{10x}} \Rightarrow A = 0, \quad 2c = -6 \rightarrow \boxed{c = -3}$$

$$\boxed{h_p = -3}$$

$$h_G = \frac{k}{x^2} - 3$$

$$h(1) = 15 = \frac{k}{1^2} - 3 \Rightarrow k = 18 \qquad \boxed{h(x) = \frac{18}{x^2} - 3}$$

P.C : $(x,y) \,/\, \nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 0 = \frac{18}{x^2} - 3 + 6xy - 2y - 3 \quad \text{(I)} \quad 0 = \frac{18}{x^2} - 6 + 6xy - 2y - 3 \\ 0 = 3x^2 - 2x - 1 \longrightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = -1/3 \end{cases}$$

$\boxed{x = 1} \rightarrow$ (I) $18 - 6 + 6y - 2y = 0 \Rightarrow 4y = -12 \Rightarrow y = -3$ $\boxed{PC_1 = (1,-3)}$

$\boxed{x = -1/3} \rightarrow$ (II) $54 - 6 - 2y - 2y = 0 \rightarrow 48 = 4y \Rightarrow y = 12$

$$\boxed{PC_2 = (-1/3, 12)}$$

Hessiano

$$\begin{cases} h''_{xx} = -\frac{18}{x^3} + 6y \\ h''_{xy} = 6x - 2 \\ h''_{yy} = 0 \end{cases} \qquad H(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{18}{x^3} + 6y & 6x - 2 \\ 6x - 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |H(x,y)| < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

No hay extremos

(resuelto por Sylvina)

AM2 PEH | 1° parcial | HOJA N° 5/5 | FECHA 22-8-23

a) Dada $f(x,y) = 3y\,h(x)$ con $h = h(x)$ derivable, determinar el valor y la dirección de máxima derivada direccional en $(1,2)$ siendo $h = h(x)$ la sol. de $x h'(x) - (1+3x)h = 0$ con $h(1) = e^3$

<u>Hallo h</u>

$$x h'(x) - (1+3x) h = 0$$

$$x h'(x) = (1+3x) h \xrightarrow{h' = \frac{dh}{dx}} x \frac{dh}{dx} = (1+3x) h$$

$$\frac{1}{h} dh = \left(\frac{1+3x}{x}\right) dx$$

$$\frac{1}{h} dh = \left(\frac{1}{x} + 3\right) dx$$

$$\ln(h) = \ln(x) + 3x + c$$

$$e^{\ln(h)} = e^{\ln(x) + 3x + c}$$

$$h(x) = e^{\ln(x)} e^{3x} e^{c}$$

$$h(x) = x e^{3x} k \qquad h(1) = e^3 = 1 e^3 k \Rightarrow k = 1$$

$$\boxed{h(x) = x e^{3x}}$$

$$f(x,y) = 3yxe^{3x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2)\Big|_{max} = \|\nabla f_{(1,2)}\|$$

$$\text{y } \vec{v} = \nabla f(1,2)$$

$$f'_x = 3y\,e^{3x} + 3yxe^{3x}\,3$$

$$\hookrightarrow f'_x(1,2) = 24e^3$$

$$f'_y = 3xe^{3x} \rightarrow f'_y(1,2) = 3e^3$$

$$\boxed{\vec{v} = (24e^3, 3e^3)}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2)\Big|_{max} = 3e^3\sqrt{65}}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)